

区域地下水系统过程辨识

孙云伟 李砚阁

(水利部南京水文水资源研究所)

提 要: 本文从水文地质的基本原理出发,从几个不同的侧面导出了地下水系统状态转移方程的一般形式。以山西省太原市3个地下水源地为例,用长系列观测资料对地下水系统进行了过程辨识。

主题词: 过程辨识 区域地下水系统

随着计算机的发展和测试手段的革新,水文地质研究越来越深入体现了一个从宏观到微观的变化过程。然而,地下水系统是异常复杂的,现有的测验手段和研究方法,还很难搞清全部的物理机制。从微观再走到宏观,从物理原理出发用宏观系统识别的方法来研究地下水系统,而不拘泥局部微观机制,应该是地下水研究的发展方向。本文将阐述水文地质各种模型之间的相通性,并用最小二乘法对区域地下水过程辨识作初步尝试。

一、现有区域地下水系统模型的分析

1. 区域地下水系统理想解析模型 这些模型包括: Dupuit井流模型、Thiem井流模型、Theis非稳定井流模型等。它们对区域井片规划、水井设计、抽水试验求参曾发挥过很大作用。但这种理想化水文地质模型假定条件太多,有时与实际情况相差太远。而且其模型的解析解没有通用性,每个公式都有自己特殊的应用条件,无法编成通用程序。

2. 区域地下水系统数值模型 这是一种描述地下水系统物理机制的数学模型。它利用方便的输入输出设备,修改算法、修改模型很容易,也便于利用输入输出信息反求少量的水文地质参数,能够形成一套完整的计算机软件。但是,它对水文地质条件要求严格,必须十分准确地了解水文地质概念,模型才能进行数学模拟。

由非稳定流有限元解法可以导出下列两个方程:

$$[S]_e \begin{bmatrix} \frac{dh_i}{dt} \\ \frac{dh_j}{dt} \\ \frac{dh_k}{dt} \end{bmatrix} = -[T]_e \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

方程(1)是由每个有限元的方程,组合所有单元的方程(1)可以得到:

$$\frac{dH}{dt} = AH + BU \quad (2)$$

H: 为各节点水头组成的矩阵; U: 为各单元源汇项组成的矩阵; A、B为系数矩阵。

可见,方程(2)就是地下水系统的状态转移方程。

3. 概率统计模型 一般包括回归分析、逐步回归、谱分析、时间序列分析以及带随机变量的微分方程等。地下水的形成、贮存、运动是一个受多种因素影响的复杂过程。确定性模型虽然给人一种明确的物理概念,但考虑的变量不宜太多。概率统计模型可以帮助人们分析地下水形成中的各种复杂的因素,并区别主次,由此建立的随机模型比确定性模型更加符合实际。但是它需要的观测资料较长,有时模型难以进行物理解释。

例如常见的多元线性回归模型:

$$\begin{aligned} h_i(k+1) + a_0 h_i(k) + a_1 h_i(k-1) + \dots = & b_{10} q_i(k) + b_{11} q_i(k-1) + \dots \\ & + b_{20} q_2(k) + b_{21} q_2(k-1) + \dots + b_{i0} q_i(k) + b_{i1} q_i(k-1) \\ & + \dots + c_0 p(k) + c_1 p(k-1) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $h_i(k)$ 为k时段第i点的地下水水头; $q_i(k)$ 为k时段第i点的开采量; $p(k)$ 为k时段降水量; a、b、c为回归系数。

由于不了解其物理机制,不了解各变量之间的相容性,往往夸大(或重复)某个变量的作用或忽视有些变量的作用。如果考虑某点地下水位与前阶段地下水位、相邻地点地下水位该点开采量的相关(其物理意义下面述说),则区域回归模型为:

$$H(k+1) = AH(k) + BQ(k) \quad (4)$$

式中: $H(k)$ 为地下水头向量; (Qk) 为开采量向量(包含常数项); A、B为系数矩阵。

方程(4)也就是地下水系数离散型状态转移方程。

4. 响应函数模型 Maddock (1972)^[1]用线性系统理论与格林函数提出了地下水位降深响应函数的离散形式:

$$S(k, n) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta(k, j, n-i+1) Q(j, i) \quad (5)$$

式中: $S(k, n)$: 第k井第n时段的水位降深; $\beta(k, j, n-i+1)$: 第j井从第i时段的单位脉冲对第k井第n时段的平均降深(即响应函数); $Q(j, i)$: 第j井第i时段的平均开采量; m: 井数; h: 时段数。

这种模型在地下水优化管理中经常作为水位约束条件起到一定的作用。但它没有考虑到开采量以外的其它源汇项的影响,也没有考虑到相邻单位之间水位的影响,忽视了地下水系统的自组织能力。

二、区域地下水系统模型的建立

总结以上分析可知,地下水系统建模方法有两种:机理分析法和测试法。机理分析法是

根据一些已知的定律、定理和原理（如能量守恒、质量守恒）来建立数学模型。但是这种建模方法只能用于简单的过程建模，对于比较复杂的实际过程来说，需要对研究对象提出一定的简化假定，否则，会使问题过于复杂化。而这些假定往往导致模型与实际情况的偏差。测试法是充分利用实际的输入输出资料来建立过程的数学模型，这就是过程辨识。过程的输入输出信号总是可以测量的，而且过程的动态特征必然表现在输入输出信息之中。

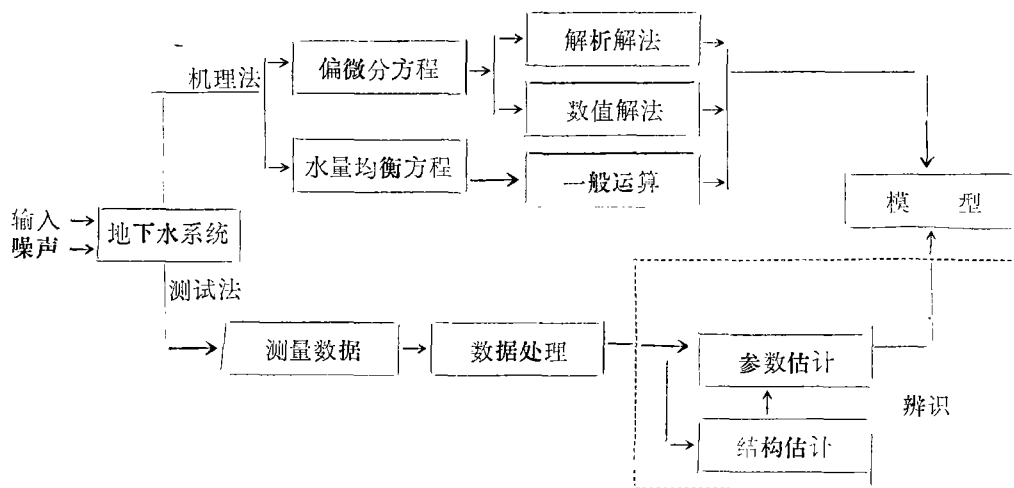


图 1 地下水建模途径示意图

Schematic process of groundwater modelling

图 1 显示地下水系统建模的两个途径。在这两个方面，人们都分别做了大量的工作。然而不能两全其美。我们的工作就是试图结合这两个方面建模的优势，扬长避短，从物理概念出发形成形式模型，然后再充分利用过程辨识的作用识别模型参数，而模型的结构是由形式模型决定的。

区域地下水系统最基本的方程应是地下水水量平衡方程：

$$F_i U_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n k_{ij} b_{ij} M_{ij} \frac{x_j - x_i}{l_{ij}} - Q_i + \bar{Q}_i, \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

式中：\$F_i\$ 为第 \$i\$ 单元的面积；\$U_i\$ 为第 \$i\$ 单元的给水度或贮水系数；\$x_i\$ 为第 \$i\$ 单元的地下水头；\$t\$ 为时间；\$k_{ij}\$ 为 \$i\$ 单元与 \$j\$ 单元之间的渗透系数；\$b_{ij}\$ 为 \$i\$ 单元与 \$j\$ 单元之间的宽度；\$M_{ij}\$ 为 \$i\$ 单元与 \$j\$ 单元之间的含水层厚度；\$Q_i\$ 为 \$i\$ 单元的开采量；\$\bar{Q}_i\$ 为 \$i\$ 单元的其它源汇项。

对于所有的单元都可写成式 (6)，组合起来可得：

$$\frac{dX}{dt} = AX + BQ + C \quad (7)$$

其中：\$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]^T\$；\$Q = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ \dots \ Q_n]^T\$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

如将 (7) 式写成离散形式则为:

$$X(k+1) = A X(k) + B Q(k) + C \quad (8)$$

方程 (7)、(8) 是由地下水均衡方程导来, 由于多数地下水模型都是以水量平衡为基础的, 方程 (2)、(4) 与 (7)、(8) 一致并非巧合。从模型 (8) 可以看出某点地下水与上一时段该点以及相邻单元地下水位有关, 同该点上时段开采量有关。相邻单元的开采量以及以前的开采量、本点以前的开采量的影响已经表现在前一阶段的水位之中, 无须再重复它们的作用。

由此, 我们可以以方程 (8) 为依据, 用历史上的地下水动态资料和开采量 (或者加其它源汇项) 辨识系统参数 A、B。

三、地下水系统参数辨识

地下水系统的一般状态转移方程 (8) 又可写为:

$$\begin{cases} h_1(k+1) = a_{11}h_1(k) + a_{12}h_2(k) + a_{13}h_3(k) + \cdots + b_1Q_1(k) + c_1 \\ h_2(k+1) = a_{21}h_1(k) + a_{22}h_2(k) + a_{23}h_3(k) + \cdots + b_2Q_2(k) + c_2 \\ \vdots \\ h_n(k+1) = a_{n1}h_1(k) + a_{n2}h_2(k) + a_{n3}h_3(k) + \cdots + b_nQ_n(k) + c_n \end{cases} \quad (9)$$

从方程 (9) 和图 2 可以看出: 地下水系统是一个分散控制 (指不同位置上的开采) 的, 又由达西定律相互协调起来的大系统。为了便于计算, 可将系统进行分解, 一一辨识其子系统的参数。参数识别的方法很多, 这里以最小二乘法为例。

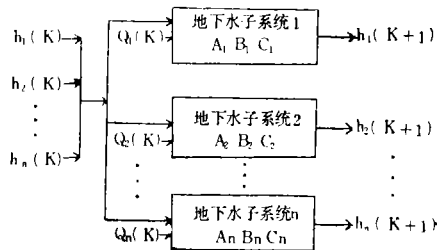


图 2 地下水系统示意图
Scheme of groundwater system

$$V = \sum_{k=1}^m e^2(k) = \sum_{k=1}^m \left[h(k+1) - \sum_{i=1}^n a_i h_i(k) - b Q(k) - c \right]^2 \quad (10)$$

V 为损耗函数。最小二乘法就是使 V 值达到最小, 从而求得 $a_1, a_2, \dots, a_n, b, c$ 。

太原市北郊区有地下水水源地 3 处: 兰村水源地、西张水源地以及太原钢铁厂水源地。它们彼此影响, 形成一个有机的地下水系统。虽然 3 处都在开采承压水, 但水源地之间、井与井之间的含水层错综复杂, 现有水文地质资料难以说明其地下水过程。我们利用 (9) 式的形式模型求得其参数 (见表 1)。

表 1 三个水源地地下水位 (m) 与开采量 ($\times 10^4 \text{m}^3$) 表

Table of ground water level and pumping quantity

月	兰村 h_1	西张 h_2	太钢 h_3	兰村 Q_1	西张 Q_2	太钢 Q_3
1	790.96	792.46	780.38	712.38	447.20	302.19
2	790.65	792.32	779.89	772.36	444.28	319.14
3	790.60	792.30	779.91	767.54	480.73	295.81
4	790.71	792.18	779.80	692.53	412.66	309.98
5	789.81	791.75	778.76	769.33	466.12	226.06
6	789.39	791.26	777.60	734.40	459.25	289.22
7	788.64	791.00	777.61	766.96	458.94	291.66
8	789.73	791.58	778.21	723.30	470.39	310.18
9	789.67	791.57	777.87	718.73	449.45	308.61
10	789.64	791.15	777.65	723.97	459.96	291.00
11	789.42	791.18	777.45	700.10	441.57	298.27
12	788.73	790.72	776.43	709.97	459.77	381.17

解得:

$$\begin{aligned}
 h_1(k+1) &= 0.037456 h_1(k) + 0.911738 h_2(k) + 0.07276 h_3(k) \\
 &\quad - 0.005028 Q_1(k) - 14.66425 \\
 h_2(k+1) &= 0.042569 h_1(k) + 0.360328 h_2(k) + 0.168088 h_3(k) \\
 &\quad - 0.00138 Q_2(k) + 341.8118 \\
 h_3(k+1) &= 0.106094 h_1(k) + 0.777633 h_2(k) + 0.361862 h_3(k) \\
 &\quad - 0.001376 Q_3(k) - 202.5463
 \end{aligned} \quad (11)$$

或写成:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} h_1(k+1) \\ h_2(k+1) \\ h_3(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.037456 & 0.911738 & 0.07276 \\ 0.042569 & 0.360328 & 0.168088 \\ 0.106094 & 0.777633 & 0.361862 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1(k) \\ h_2(k) \\ h_3(k) \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} -0.005028 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00138 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001376 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \\ Q_3(k) \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} -14.66425 \\ 341.8118 \\ -202.5463 \end{pmatrix} \quad (12)
 \end{aligned}$$

即

$$H(k+1) = A H(k) + B Q(k) + C \quad (13)$$

计算水位过程实际水位过程比较见图 3。

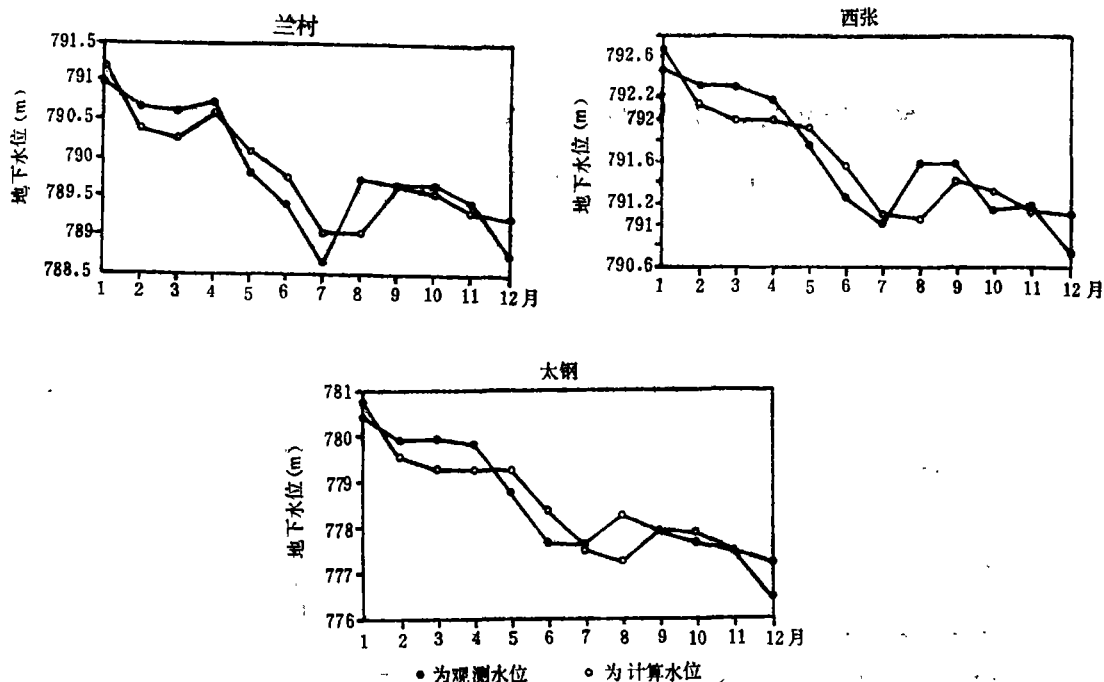


图 3 计算水位与观测水位比较图

Comparisons of calculated head with observed head

对这三个水源地组成的地下水系统，我们还做了以下这个模型。

$$h(k+1) = a h(k) + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + b_3 Q_3 + C \quad (14)$$

这种从定性上让人信服的模型（某点地下水位与前阶段本点地下水位相关，与本单元及相邻单元开采量相关，似乎合情合理）就得不到让人满意的结果：a可能是负的，而 b_1 、 b_2 、 b_3 有时可能是正的。式 (13)、(14) 用的是同样的资料，而得出不同的结果。

综上所述，可以得出如下结论：

由物理机制导出形式模型，结合具体的输入—输出信息，进行过程辨识，可以发挥两种建模途径的优势，从而取得理想的结果。

与地下水系统过程辨识紧紧相连的下一步工作是系统的状态控制。如何设计反馈系统（如人工回灌、河渠引渗、灌渠形式调整）使得地下水系统稳定、可控，这是地下水管理的一个更重要的任务。作者希望在这方面与同行进行交流。

参 考 文 献

- (1) Maddock, Algebraic Technological Function a simulation Model, Water Resources, 1972.
- (2) Sun Yunwei, Yan Zhijun, System Structure of Water Resources IAHS, Publ. No. 197, 1990.

ON PROCESS IDENTIFICATION OF REGIONAL GROUNDWATER SYSTEM

Sun Yunwei

Li yange

(Nanjing Institute of Hydrology and Water Resources,
Ministry of Water Resources)

Subject terms: process identification, regional groundwater system

Abstract

A state-space model is presented for analysing and formulating groundwater system in this paper. From several models of groundwater system, such as ideal analytical model, numerical model, statistical model, response function model, and based on the principle of water balance and Darcy's Law, a general dynamic equation of groundwater system is deduced and established. Physical and test approaches are summarized as two main identification means of groundwater system and their advantages are analysed respectively. Taking 3 groundwater sites in Taiyuan, Shannxi province as an example, the model parameters of the groundwater system have been identified with long-series observed data of input and output.