

稳定渠道几何形态解析

孙 志 林

(杭州大学)

提 要: 本文基于临界理论,同时引入合理的水流切应力表达式,建立起稳定渠道断面形态微分方程,据此获得断面曲线、过水面积及湿周的全部分析解。在此基础上,结合现有基本力学方程,严格从理论上导出稳定渠道的河相关系,并用实测资料作初步验证,结果较为满意。还运用积分中值定理给出断面宽度的另一形式的分析解,以便于水力计算中应用。

主题词: 稳定渠道 河相关系 断面曲线 分析解 临界理论

不少河流地貌学公式基于渠道观测资料而建立并移用于天然河流,其中最著名的是谢才公式。冲积河流河相关系的研究最初也是从渠道入手的^[1],渠道既是天然河流的理想模型,可籍以探索河流运动规律,又直接用于农田灌溉、工业引水等人类活动,因而渠道研究具有一定的理论意义和实用价值。

如所周知,稳定渠道几何形态的完整描述包括断面形状和河相关系两个方面。不同学者用各自的方法就问题的一个侧面作过研究,但从理论上全面导出几何形态的分析解似乎很少。本文试图根据临界理论^[2],对此进行深入探讨。首先引入合理的当地水流切应力表达式,建立起平衡微分方程,据此严格求出断面曲线、过水面积及湿周的分析解。然后由分析解与基本力学关系构成封闭方程组,解得理论河相关系。与渠道实测资料的比较表明,理论计算与实测值颇为一致。

一、断面形态微分方程及其分析解

稳定渠道是在床面各处泥沙保持静止的条件下维持的,因而其临界断面曲线应满足断面上任意点颗粒处于临界起动时的外力平衡方程

$$F^2 + (W \sin \theta)^2 = (W \cos \theta f)^2 \quad (1)$$

式中 f 为泥沙静摩擦系数, θ 为渠道边坡倾角,断面中心为零,而在水边线等于泥沙休止角 Φ ,泥沙颗粒水下重量 W 可表示为:

$$W = \alpha_1 (r_s - r) D^3$$

F 为水流方向上作用于颗粒的当地水流作用力,可认为与当地水流切应力 τ 成正比,即,

$$F = \alpha_2 D^2 \tau_0$$

lane曾假设任何面积上拖曳力等于该面积上水体重量在水流方向的分量^[2], 并认为作用于断面长度元 $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ 上的拖曳力为:

$$\tau_0 = r h j \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = r h j \cos \theta$$

笔者认为, 本文考虑的是由泥沙颗粒组成的床面而不是固壁, 球状颗粒在边坡切平面的投影面积 (即切应力作用面积) 等于其在水平面的投影面积 ($\frac{\pi}{4} D^2$)。

显然, 当地颗粒上水体重量为 $r h \frac{\pi}{4} D^2$, 沿水流方向建立均匀流动量方程:

$$r h \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \sin \alpha - \tau_0 \frac{\pi}{4} D^2 = 0$$

$$\text{则有: } \tau_0 = r h \sin \alpha = r h j \quad (2)$$

此处 α 为流动方向与水平面之交角。显然, 由于流向与断面垂直, 沿水流方向的作用力 τ_0 在断面上不可能有分量, 故 (2) 式在断面上均有效。这就是说, 当地水流切应力只随当地水深 h 而变, 而与坡角 θ 无关。

将诸力表达式代入方程 (1) 得:

$$\left[\frac{\alpha_2 r h j}{\alpha_1 (r_s - r) D} \right]^2 + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta f^2$$

利用条件: $\eta = h / H_0 = 1$ 时, $\theta = 0$; $\eta = 0$ 时, $\theta = \phi$

$$\text{则有: } \frac{\alpha_2 r H_0 j}{\alpha_1 (r_s - r) D} = f = \tan \phi \quad (3)$$

按图 1 坐标系, $\cot \theta = -\frac{dx}{dh}$, 于是稳定断面形态微分方程可化为:

$$\frac{dx}{dh} = -\frac{1}{f} \sqrt{\frac{1 + (f\eta)^2}{1 - \eta^2}} \quad (4)$$

既然引进的水流切应力表达式不同, (4) 式与文献[2]中相应微分方程无疑存在差异。利用 (4) 式, 我们将求出包括断面曲线、过水面积及湿周在内的全部分析解。

考虑到一般 $\phi < 4/\pi$, 即 $f\eta < 1$, 故可作级数展开如下:

$$\sqrt{1 + (f\eta)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (f\eta)^{2n}$$

积分 (4) 式, 并利用边界条件 ($\eta = 1$ 时, $x = 0$) 可得:

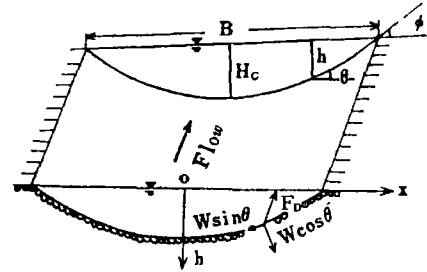


图 1 床面颗粒受力及坐标系
Forces acting on the bed particles
and coordinate system

$$\frac{x}{H_c} = \frac{1}{f} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(f) \right] \cos^{-1} \eta - \frac{1}{f} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(f) \left[1 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \eta^{2m} \right] \eta \sqrt{1-\eta^2} \quad (5)$$

其中, $P_n(f) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \left[f^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2$

由边界条件, $\eta = 0$ 时, $x = B/2$, 则有:

$$\frac{B}{H_c} = F(f) = \frac{\pi}{f} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(f) \right] \quad (6)$$

(5) 式即为稳定渠道断面曲线的分析解, (6) 式则为相应的水面宽度计算公式。

利用微分方程 (4) 还可进一步获得过水面积 A 和湿周 P 的精确解:

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{B/2} h \, dx = 2 H_c^2 \int_1^0 \frac{dx}{dh} \eta \, d\eta \\ &= \frac{2H_c^2}{f} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+(f\eta)^2}{1-\eta^2}} \eta \, d\eta = (\operatorname{ctg} \phi + \operatorname{csc}^2 \phi) H_c^2 \end{aligned} \quad (7)$$

而据弧长微分公式 $ds = -\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dh}\right)^2} \, dh$ 则有:

$$P = 2 \int_s ds = -2 \int_1^0 \sqrt{1 + \frac{1+(f\eta)^2}{f^2(1-\eta^2)}} \, d\eta = \frac{\pi}{\sin \phi} H_c \quad (8)$$

(5) 至 (8) 式完全根据力学方程解出, 理论上较为严格和合理, 从而可据以推导代数形式的河相关系的理论公式, 这是前人所未能做到的。

当然, 为便于渠道设计等实际水力计算, 对断面曲线和水面宽度, 可由 (4) 式按积分中值定理求出具有初等函数形式的分析解:

$$\frac{x}{H_c} = \frac{1}{f} \sqrt{1 + f^2 [a + (1-a)\eta]^2} \cos^{-1} \eta \quad (9)$$

相应地, $\frac{B}{H_c} = \frac{\pi}{f} \sqrt{1 + (fa)^2} = F(f) \quad (10)$

式中 $0 < a < 1$, a 具体取值视 f 而定 (见表 1), 但变化甚小, 介于 0.692 与 0.705 之间。当近似取 $a = 0.7$ 时, 相对计算误差小于 0.4%。

二、河相关系的理论表达式

冲积水道经长期的动力调整, 在河床形态因子与来水来沙和边界条件间形成的某种函数关系即河相关系, 当且仅当力学方程数目恰好等于待求变量数时才能从理论上导出。已知的力学关系有连续方程阻力方程, 显然需要补充方程方可求得给定条件下河相关系的唯一解, 多年来河相关系的研究主要集中于寻找这样的补充关系式 (不论是假设还是经验的途径)。

对稳定渠道而言, 本文根据临界理论业已找到使方程组封闭的补充关系式, 从而使理论上求解河相关系式成为可能。

按临界理论, 断面上各点水流切应力等于相应起动切应力, 故在断面中心有:

$$H_c = \frac{\tau_o}{r_j} = \frac{U_{*c}^2}{g_j} \quad (11)$$

τ_o 或 U_{*c} 可根据起动切应力公式计算或查有关图表确定。

应当指出, 上述断面尺度关系式是在一定的流量条件下求得的。在此流量下渠道保持临界稳定状态, 故称该流量为临界流量 (threshold discharge), 其值一般宜取造床流量。而在渠道设计时则取设计流量。

将 (6) 式 (或 (10) 式)、(7)、(8) 和 (11) 式与水流连续方程

$$Q = AV \quad (12)$$

$$\text{及阻力公式 } V = K \left(\frac{R}{D} \right)^{1/6} \sqrt{gRJ} = K \left(\frac{A}{DP} \right)^{1/6} \sqrt{g \frac{A}{P} J} \quad (13)$$

结合起来, 不难求得 6 个未知数 H_c 、 J 、 B 、 A (或 H)、 P (或 R) 和 V 的唯一解。于是河相关系的理论表达式为:

$$H_c = \left[\frac{\pi^4 \sin^6 \phi}{(\cos \phi + \phi \csc \phi)^{10}} \right]^{1/13} \left[\left(\frac{Q}{KU_{*c}} \right) D \right]^{1/13} \quad (14)$$

$$J = \left[\frac{(\cos \phi + \phi \csc \phi)^{10}}{\pi^4 \sin^6 \phi} \right]^{1/13} \frac{U_{*c}^2}{gD} \left(\frac{KU_{*c} D^2}{Q} \right)^{6/13} \quad (15)$$

$$B = F(f) \left[\frac{\pi^4 \sin^6 \phi}{(\cos \phi + \phi \csc \phi)^{10}} \right]^{1/13} \left[\left(\frac{Q}{KU_{*c}} \right)^6 D \right]^{1/13} \quad (16)$$

$$A = \left[\frac{\pi^6}{(\cos \phi + \phi \csc \phi)^7 \sin \phi} \right]^{1/13} \left[\left(\frac{Q}{KU_{*c}} \right)^6 D \right]^{2/13} \quad (17)$$

$$P = \left[\frac{\pi^{17}}{(\cos \phi + \phi \csc \phi)^{10} \sin^7 \phi} \right]^{1/13} \left[\left(\frac{Q}{KU_{*c}} \right)^6 D \right]^{1/13} \quad (18)$$

$$V = \left[\frac{(\cos \phi + \phi \csc \phi)^7 \sin \phi}{\pi^6} \right]^{1/13} \left[\frac{(KU_{*c})^{12} Q}{D^2} \right]^{1/13} \quad (19)$$

式中 ϕ 以弧度计, 可根据下式^[3]计算 ($D \leq 4 \text{ mm}$)

$$\phi = 0.567 + 0.0222 D \quad (D \text{ 以 mm 计}) \quad (20)$$

或在文献 [2] 中附图 ($D > 0.5 \text{ mm}$)。

系数 K 反映床面的阻力特性, 床面越光滑平整, K 值越大, 但变幅较小, 一般可取 6.06。根据 (6) 式计算的 $F(f)$ 及相应 (10) 式中的 a 值列于表 1。

表1 $F(f)$ 和 a 值
The value of $F(f)$ and a

ϕ	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$F(f)$	8.91058	8.47776	8.08393	7.72402	7.39379	7.08968	6.80870	6.54827	6.30621
a	0.701354	0.704065	0.703760	0.703440	0.703104	0.702751	0.702382	0.701997	0.701595
ϕ	29	30	31	32	33	34	35	36	37
$F(f)$	6.08061	5.86985	5.67249	5.48728	5.31313	5.14907	4.99425	4.84789	4.70931
a	0.701175	0.700738	0.700284	0.699811	0.699320	0.698810	0.698281	0.697733	0.697165
ϕ	38	39	40	41	42	43	44	45	
$F(f)$	4.57797	4.45325	4.33468	4.22184	4.11431	4.01174	3.91380	3.82020	
a	0.696577	0.695968	0.695338	0.694687	0.694015	0.693320	0.692602	0.691860	

三、验证与讨论

根据力学方程从理论上导出的稳定渠道断面曲线和河相关系是否符合实际, 需要由实测资料加以检验。利用Simons等人搜集的渠道资料^[4], 按本文公式计算了水面宽度和湿周, 并与相应实测值作比较(图2)。所列渠道一般冲刷微弱(除个别外), 水流含沙量较小, 可视为稳定的。计算时起动切应力采用Egiazaroff公式^[5]:

$$\frac{\tau_c}{(r_s - r)D_{25}} = 0.1 [\lg 19 (D_{25}/D)]^2 \quad (21)$$

以便适应渠道组成物质的非均匀特性。

由图2可见, 理论值与实测值颇为一致。进一步分析发现, 当床面发育沙波时, 计算值与实测值的差异逐渐明显起来。若取按实测流速反求的 K , 则差异就会减小。故可认为点据偏离45°直线, 系由沙波改变阻力特性因而系数 K 变小所致。并非理论公式本身的问题。当剔除存在沙波的

个别资料后, 点据的偏离程度大为减小。这就意味着理论公式所揭示的规律对不冲或微冲的稳定渠道情形是符合的。

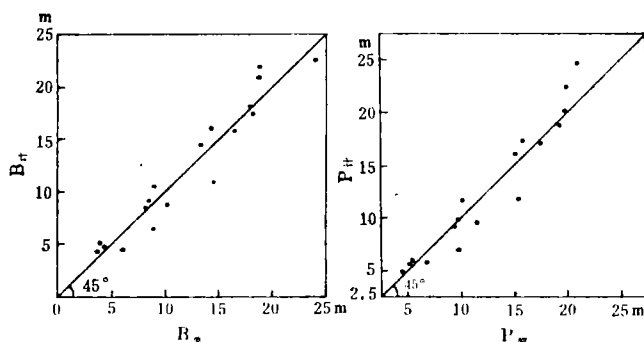


图2 理论公式与实测资料的比较

Comparison of theoretical formulas with measured data

图3给出 $\phi = 30^\circ$ 时不同学者导出的稳定渠道断面曲线。其中有苏联学者的抛物线型断面^{〔6〕}:

$$\begin{cases} B = 4 H_0 \operatorname{ctg} \phi & (22a) \\ X = 2 H_0 \operatorname{ctg} \phi \sqrt{1 - \eta} & (22b) \end{cases}$$

及Lane的余弦曲线型断面^{〔2〕}:

$$\begin{cases} B = \pi H_0 \operatorname{ctg} \phi & (23a) \\ X = 2 H_0 \operatorname{ctg} \phi \cos^{-1} \eta & (23b) \end{cases}$$

这两家公式分别在苏联和欧美的稳定渠道设计方面颇有影响,并在有关手册和教科书中广为引用。尤其是公式(22),受到实测资料的验证,具有一定的可靠性。比较三条曲线发现,它们形态相似,以Lane曲线最为深窄,本文曲线介于其余两条曲线之间,这就从另一侧面印证了本文公式的正确性。

考察河相关系的结构发现,水面宽度 B 与 $Q^{6/13}$ 成正比,此与Carlston根据美国中西部河流、Knighton分析英国河流及Chang对砾石河流的推理分析等所得的结论^{〔7〕}相一致。与Stevens考虑顺直河道受植被影响所得均衡关系^{〔8〕}亦较接近。表明理论公式能反映稳定水道几何形态的客观规律。

由公式可知,稳定渠道的几何形态主要与造床流量 Q 、泥沙粒径 D 、起动切应力 τ_* 。(或 U_{*c})和泥沙休止角 ϕ (或 f)有关。对非粘性砂而言, τ_* 和 ϕ 均由 D 所确定,并随 D 增大而增大,因而渠道几何尺度取决于流量和泥沙粒度,且流量越大,泥沙粒度越细,断面尺度就越大,而纵坡则越平缓。

有关稳定水道几何形态问题,Kirby^{〔9〕}和Chang^{〔10〕}分别基于最大输沙效率原理和假设最小河流功率进行过研究,获得给定输沙时所需的最小比降,但不能求出显式河相关系,且需预先指定断面形状。而更多的研究则是通过实测资料分析获得经验性河相关系,例如均衡关系^{〔3〕}。Lane提出的临界理论,在假设 $\tau_* = r h j \cos \theta$ 的前提下,可获得断面曲线的简单分析解,但湿周表达式为第二类椭圆积分函数,因而未能将河相关系以显函数形式表出。Li将临界理论推广到卵石河道时未能克服上述不足^{〔11〕}。文献〔6〕仅求得断面曲线、过水面积及湿周的近似积分,由此导出的河相关系自然具有近似的性质。上述研究都未能从力学方程入手同时解出断面曲线和河相关系的理论表达式。因此,本文严格从理论上导出的断面曲线、过水面积和湿周的分析解以及据此获得的河相关系,其理论意义是不言而喻的。

然而临界理论一般适用于低含沙量水流的非粘性砂稳定渠道。对颗粒含粘性时,如何改进适用于粘性砂的起动切应力公式和休止角公式,以使本文公式保持有效尚待进一步研究。要将理论公式用于天然河流还需由河流实测资料作必要的检验。至于临界水道能够输送多大含沙量的水流而不致落淤,则可根据临界几何尺度按水流挟沙力公式加以确定。

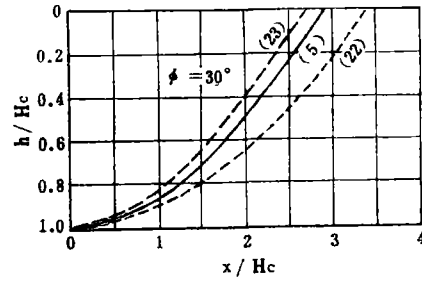


图3 稳定渠道断面曲线之比较

Comparison between various cross-section curves of stable channel

参 考 文 献

- 〔1〕 Leopold, L.B. et al. Fluvial Processes in Geomorphology, Freeman and Comp. 1964. 532.
- 〔2〕 Shen, H.W. (Ed) River Mechanics, Chap.16 Water Resource Pub. 1971.
- 〔3〕 谢鉴衡主编. 河流泥沙工程学(上册). 北京: 水利出版社, 1981. 372.
- 〔4〕 Simons, D.B. et al Uniform Watre Conveyance in Alluvial Material, Trans. ASCE 1963 V.128, Part I, 65-102
- 〔5〕 Graf, W.H. Hydraulics of Sediment Transport, Water Resources Pub. 1984. 531.
- 〔6〕 张开泉. 稳定渠道的断面形状. 泥沙研究, 1986 (3): 79-86
- 〔7〕 Knighton, K. Fluvial Forms and Processes, Edward Arnold, 1984. 218.
- 〔8〕 Stevens, M.A. Width of Straight Alluvial Channels, J.Hyd.Engineering ASCE 1989. V.115, Hy3. 309-326
- 〔9〕 Kirby, M.J. Maximum Sediment Efficiency as a Criterion for Alluvial Channel, In: River Channel Changes, K.J.Gregor (Ed), John Wiley & Sons 1977, 429-442.
- 〔10〕 Chang H.H. Stable Alluvial Canal Design, J.Hyd Div. ASCE 1980, V.106, Hy.5. 873-891
- 〔11〕 Li, R. et al, Morphology of Cobble Streams in Small Watersheds, J.Hyd.Div. ASCE 1976, V.102, Hy.8. 1101-1117.

ANALYTIC SOLUTION OF STABLE CHANNEL GEOMETRY

Sun Zhilin

(Hangzhou University)

Subject terms: stable channel, morphologic equations, cross-section curve, analytic solution, threshold theory

Abstract

This paper has obtained the exact analytic solutions for the cross-section curve, area and wet perimeter from the differential equation of stable channel geometry based on the fundamental assumption that particles on the channel boundary are in the threshold movement. The morphologic equations therefore are first strictly derived from simultaneous equations, including continuity equation and flow resistance formula. Comparison of the theoretical morphologic equations with measured data shows a good agreement. According to the integral mean-value theorem, moreover, another form of solution for the cross-section curve is found, which is very simple for the hydraulic computation of the stable channel.